www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles EDHEC, ESC Reims, ESC Rouen, ICN

CONCOURS D'ADMISSION 1989

Aucun document n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
OPTION GENERALE

EXERCICE DE MATHEMATIQUES

On considère la fonction numérique F, d'une variable réelle x, définie par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$

1°) Quel est l'ensemble de définition de F ?

2°) Montrer que F est une fonction impaire.

3°) Justifier la dérivabilité de F sur IR et calculer F'(x).

4°) Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$$

En déduire la limite de F(x) quand x tend vers $+\infty$.

5°) Dresser le tableau des variations de F.

6°) En précisant la méthode employée et en détaillant les calculs intermédiaires, déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de F(1).

7°) Construire la courbe représentative de F.

8°) On pose $H(x) = x \int_x^{2x} \left[\frac{1}{\sqrt{4+t^4}} - \frac{1}{t^2}\right] dt$, pour $x > 0$

Etablir que : $\lim_{x \to +\infty} H(x) = 0$

En déduire un équivalent de F(x) au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE DE STATISTIQUES - PROBABILITES

Un commerçant vend un certain article périssable A qu'il achète lui-même a francs (par unité de A) et revend en réalisant un bénéfice de b francs (par unité de A).

Les produits sont achetés par le commerçant le matin et vendus dans la journée, sinon ils sont perdus.

Le problème de ce commerçant est donc de déterminer le nombre optimal S d'unités de ce produit qu'il devrait acheter chaque matin.

On suppose que le nombre X d'unités de cet article demandé en une journée par la clientèle est une variable aléatoire à valeur dans IN, avec comme probabilité de l'événement [X = k] :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = p_k, \quad p_k > 0$$

1°) On suppose dans cette question que le commerçant achète le matin N unités du produit A.

a) Quel est, en fonction du nombre k de demandes des clients, le gain de ce commerçant.

b) Calculer l'espérance E_N de ce gain.

2°) a) Démontrer que $E_{N+1} - E_N = b - (a+b)\sum_{k=0}^{N} p_k$

b) Préciser les conditions dans lesquelles les termes de la suite E_N sont dans un ordre croissant, puis décroissant.

c) Montrer alors que le bénéfice optimal est obtenu pour la plus petite valeur entière N telle que $E_{N+1} - E_N < 0$ ou encore telle que

$$\sum_{k=0}^{N} p_k > \frac{b}{a+b}$$

PROBLEME

Une compagnie de distribution organise un jeu à l'intention de sa clientèle. A chaque passage dans l'un de ses établissements, le client reçoit une carte portant dans un ordre quelconque les n lettres, toutes distinctes, formant le nom de la compagnie.

Selon le nombre de lettres placées au bon endroit, dans l'écriture du nom, le client peut alors recevoir un prix.

Le but de ce problème est d'étudier ce jeu.

Première partie - A

On dispose d'une liste de n éléments distincts dans un ordre donné.
Pour k et n entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et $n \geqslant 1$ on note $I(k,n)$ le nombre de permutations de ces n éléments, qui laissent k éléments aux positions qu'ils occupaient initialement dans la liste.

Par convention on pose $I(0,0) = 1$ et on note $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

1°) Propriétés de I (k,n) :

a) Montrer que : $I(k,n) = C_n^k\, I(0,n-k)$

b) En déduire la relation : (R) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, I(0,k) = n!$

2°) Calcul de I (k,n)

a) Montrer que : $C_i^k \cdot C_n^i = C_n^k\, C_{n-k}^{i-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$

En déduire : $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} (-1)^i\, C_i^k\, C_n^i = 0$

b) En écrivant la relation (R) avec n prenant successivement les valeurs 0, 1, 2, ... p, établir

$I(o,p) = (p!) \displaystyle\sum_{i=o}^{p} \frac{(-1)^i}{i!}$

3°) Probabilités associées au jeu :

On note X_n la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de lettres correctement placées sur une carte tirée au hasard. On suppose que les cartes sont imprimées de façon à ce que toutes les permutations des n lettres soient équiprobables.

a) Montrer que : $P(X_n = k) = \dfrac{I(k,n)}{n!}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

b) Après avoir vérifié que pour $1 \leqslant k \leqslant n$: $k\,P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)$

Calculer l'espérance de X_n.

4°) Etude asymptotique :

a) Quelle est la limite quand n tend vers plus l'infini de $P(X_n = k)$ où k est un entier fixé.

b) En déduire que pour n grand, $P(X_n = k)$ peut être approché par $p_k = P(X = k)$ où X est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ à préciser.

5°) Evaluation numérique de $P(X_n = k)$

a) On considère la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, dont la somme est e^{-1}

On pose : $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$
Montrer que les deux suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) où $n \in \mathbb{N}$ sont monotones.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, e^{-1} est élément de l'intervalle d'extrémités s_n et $s_n + 1$, puis que
$|s_n - e^{-1}| \leqslant |u_{n+1}|$

c) Montrer alors que si l'on donne $p_k = e^{-1}/k!$ comme valeur approchée de $P(X_n = k)$ l'erreur commise vérifie :

$$|p_k - P(X_n = k)| \leqslant \frac{1}{k!\,(n-k+1)!}$$

d) Dans l'hypothèse où n = 7, montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $|p_k - P(X_n = k)| < 2.10^{-3}$

Deuxième partie - B

Cette seconde partie étudie l'espérance du gain d'un participant à ce jeu.

1°) On considère la fonction numérique f, d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

a) Etudier et représenter la fonction f.

b) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, la fonction dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}(x)$. Préciser $f^{(n)}(0)$.

c) Constater que :

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

2°) On suppose dans la suite du problème que le montant g_k du prix gagné par un client, si la carte qu'il reçoit comporte k lettres bien placées, est fixé à :

$g_k = S\,k!\,\alpha^k$,

S désigne une constante reelle strictement positive, α un réel strictement supérieur à 2.
Soit G_n la variable aléatoire égale au gain de ce client à la suite de l'examen d'une carte qu'il reçoit au hasard.

a) Exprimer à l'aide des valeurs de la fonction f et de ses dérivées en 0 l'espérance $E(G_n)$ de la variable G_n et justifier la relation.

$E(G_n) = S.\alpha^n [f(1/\alpha) - I_n(\alpha)]$

où $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{1/\alpha} \frac{(1/\alpha - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1/\alpha]$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$: $|f^{(p)}(t)| \leqslant \dfrac{p!e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(1-t)^k}{k!}$

puis que $|f^{(p)}(t)| \leqslant \dfrac{p!\,e! - 2t}{(1-t)^{p+1}}$

Tournez la page S.V.P.

En déduire : $\left| f^{(p)}(t) \right| \leqslant \dfrac{p!\, e}{(1 - 1/\alpha)^{p+1}}$

c) Etablir grâce à la majoration précédente :

$\left| I_n(\alpha) \right| \leqslant \dfrac{\alpha . e}{(\alpha - 1)^{n+2}}$

d) *Déterminer un équivalent de* $E(G_n)$ *quand n tend vers plus l'infini.*

3°) Détermination d'un encadrement de $E(G_n)$

a) Soit Φ_p la fonction définie par :

$\Phi_p(u) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{(-1)^i}{i!} u^i$ où $u \in [0, 1]$

Vérifier, pour $u \in [0, 1]$, la décroissance de la suite

$\left(\dfrac{u^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

En déduire que lorsque p est impair, $\Phi_p(u)$ est de signe positif sur $[0, 1]$ puis que cela implique la même propriété pour $\Phi_p(u)$ lorsque p est pair.

b) Montrer que la dérivée p-ième de f s'exprime selon la relation :

$f^{(p)}(t) = \dfrac{p!\, e^{-t}}{(1 - t)^{p+1}} \Phi_p(1 - t)$

En déduire le signe de $f^{(p)}(t)$ lorsque $t \in [0, 1/\alpha]$.

c) Etablir

$S.\alpha^n \left[f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \dfrac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}} \right] \leqslant E(G_n) \leqslant S.\alpha^n \, f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4°) Etude numérique :

On suppose dans cette question $n = 7$, $\alpha = 3$, S reste un coefficient multiplicatif non précisé.

a) Pour k prenant les valeurs 0, 1, ..., 7 donner les valeurs numériques de $P(X_7 = k)$.

b) Calculer $E(G_7)$.

c) Comparer ce résultat avec ce que prévoyait l'encadrement de $E(G_7)$ obtenu en 3° c.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail